Acerca de Conjuntos Infinitos

Sociedad Chilena de Educación Matemática

Departamento de Matemática

Universidad de La Serena

La Serena. 25 de Julio de 1997

ACERCA DEL INFINITO

Pedro Reumay R.*, Lionel Henríquez B.* Adolfo Quiroz R.*

El objetivo de este trabajo es mostrar una experiencia de aula relacionada con un concepto que escapa a nuestra experiencia física y que es motivo de muchas interrogantes cuando se plantea por primera vez en el curso de algebra básica de nuestra Universidad. Tal concepto es el de infinito.

Recurriendo a la habilidad de comprensión, adquirido en su medio ambiente a través de un vocabulario propio, se pueden definir palabras nuevas que pueden dar un significado más refinado a las palabras viejas. Pero el significado último de algunos conceptos, no se obtiene por definición directa, sino que se logra por un principio de autoaprendizaje que podemos usar para la comprensión de conceptos matemáticos. Por ejemplo aprendemos primero la adición y la multiplicación y durante años no nos interesamos sobre lo que es un número. Simplemente los usamos ampliando cada vez más el conocimiento de ellos, hasta que adquirimos la madurez necesaria para comprender su significado. Pero, ¿cuál es el significado de número infinito?

Para contar los elementos de un conjunto A usamos una aplicación biunívoca entre el conjunto de cosas que queremos contar y una parte de los números naturales, por ejemplo si la aplicación $f : A \to \{1,2,3,...,n\}$ es biunívoca, decimos que el conjunto *A* tiene '*n*' elementos.

La propiedad característica de una aplicación es la de asociar a cada valor de la variable un único elemento. Una aplicación biunívoca tiene la propiedad sobreyectiva y la propiedad inyectiva, esto es, es biyectiva. Este tipo de funciones se utiliza para contar los elementos de cualquier conjunto.

¿Cómo podemos contar los números que hay en el intervalo cerrado[0,1]?. Si fuesen números enteros, hay dos, el cero y el uno. Si fuesen números fraccionarios (racionales) hay infinitos y, si fuesen números reales (racionales e irracionales) hay infinitos también. Pero, ¿cómo pueden ser contados por el mismo número dos conjuntos tan diferentes? ¿El todo no es mayor que cada una de sus partes?.

El infinito es un tema que intriga a los pensadores desde épocas remotas antes de Cristo.

Los matemáticos clásicos evitan cuidadosamente introducir en su razonamientos el infinito, es decir, conjunto formados por una infinidad de elementos concebidos simultáneamente existentes, al menos en la mente, y se conforman con el **infinito potencial**, es decir, con la posibilidad de aumentar o

dividir toda magnitud dada. Un ejemplo de esta concepción es el enunciado de Euclides "Para toda cantidad de números primos, existe uno mayor", que hoy día expresamos diciendo que el conjunto de los números primos es infinito. Este punto de vista permitiría desarrollar la mayor parte de las matemáticas clásicas incluyendo el cálculo infintesimal y se transformó en un dogma universalmente admitido hasta la mitad del siglo XIX.

Un conjunto *X* es equipotente a un conjunto *Y* si existe una biyección de *X* sobre *Y*.

Una primera noción de equipotencia aparece en el siglo XVI con Galileo (1564-1642), quien hace notar que la aplicación n ? n^2 establece una aplicación biunívoca entre los enteros naturales y sus cuadrados, y que por consiguiente el axioma "**el todo es mayor que la parte**", no sería aplicable a los conjuntos infinitos.

Bolzano en "Paradojas del infinito" **[2]**, publicadas en 1851, tres años después de su muerte, define la noción general de equipotencia de dos conjuntos, y demuestra que dos intervalos compactos cualesquiera en IR son equipotentes; observa también que los conjuntos infinitos se caracterizan por tener una parte equipotente con el todo, esto es, los conjuntos infinitos tienen partes (propias) equipotentes con el conjunto completo. Esto sólo acontece con conjuntos infinitos. Efectivamente, si sacamos un elemento de un conjunto finito, se obtiene un conjunto con un número menor de elementos, pero de un conjunto infinito se puede sacar una infinidad de elementos, sin disminuir su cardinal, siempre que se haga de una manera conveniente. Por ejemplo, del conjunto IN podemos sacar todos los números primos, que son infinitos, sin que cambie el cardinal de IN.

Cantor (1845-1918) consideró que dos conjuntos equipotentes *X* e *Y* tienen la misma cardinalidad, esto es, si existe una biyección entre los conjuntos *X* e *Y*, se escribe *Card X* = *Card Y*. Así, Card {números pares}=*Card* IN, pues la aplicación $x \to 2x$ establece una correspondencia biunívoca entre los enteros naturales y los números pares. Cantor llamó numerable a todo conjunto equipotentes con IN y le dio el nombre $\aleph_0$ a ese cardinal, (que se lee álef cero, donde $\aleph$: aleph, es la primera letra del alfabeto hebreo). Un resultado sorprendente es que Card IN=Card Q^+. En efecto: contemos las fracciones irreductibles positivas, ordenándolas de modo que la suma del numerador y denominador sea creciente y, cuando tengan la misma suma, las ordenamos por el numerador. Por ejemplo las fracciones irreducibles cuyo numerador y denominador suman 5 son: $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ Ordenándolas por el numerador tenemos: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$

La siguiente tabla muestra el conteo de las fracciones irreducibles positivas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$	...

Esta numeración prueba que *Card {fracciones positivas}= Card* IN

La numeración de todos los números fraccionarios se puede hacer intercalando las fracciones irreducibles negativos en la secuencia anterior de la siguiente manera:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
0	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$-\frac{4}{1}$	...

Cantor demostró también que hay infinitos diferentes, es decir, existen conjuntos con infinitos elementos pero de diferentes cardinalidades, o sea, hay conjuntos infinitos que no son equipotentes. En 1874, comunica que no puede haber una biyección entre los números naturales y los números reales. La demostración de este hecho será materia de otro trabajo de información pedagógica. Cantor dio el nombre de continuum al cardinal de IR, y lo indicó por ***c***. Los cardinales de conjuntos infinitos se llaman números transfinitos. El menor número transfinito es $\aleph_0$.

Para finalizar, respondemos a la pregunta inicial. En el intervalo *(0,1)* hay tantos reales como en IR, esto es, *Card (0,1)=**c.*** En efecto, la aplicación $x \to ctg\,(p\ x)$, es una correspondencia biunívoca del intervalo abierto *(0,1)* sobre los números reales.

Si existe una aplicación inyectiva de un conjunto *X* en un conjunto *Y*, pero no se puede construir una aplicación inyectiva de *Y* en *X*, se dice que Card *X* < *Card Y*. Así podemos afirmar que el número de fracciones en (0,1) es $\aleph_0$ y el número de reales es ***c***. Ambos son números infinitos, o mejor dicho, números transfinitos, reiterando que $\aleph_0$ el menor de ellos.

A modo de conclusión, debemos decir que esta exposición responde en parte a las preguntas de los alumnos del primer curso de álgebra básica de nuestra Universidad que se asombran ante la afirmación de que los intervalos de números reales contienen la misma cantidad de elementos que el conjunto completo de números reales. La simplicidad en los conceptos básicos elementales atrae la atención de los alumnos y lentamente sedimentan el aprendizaje que sustentarán conceptos más avanzados. Esta simplicidad es particularmente sensible en las exposiciones didácticas en idioma español. La idea de infinito expresada en este trabajo tiene vigencia en cualquier plano en que gravite en forma decisiva el pensamiento racional: filosofía, ciencias naturales, ciencias sociales, etc. Siendo la Educación Matemática una disciplina que propicia el vasto el vasto alcance y hondo valor formativo de la matemática desde los inicios en primero básico hasta la defensa de título profesional de nuestros alumnos, es necesario disponer de trabajos claros y rigurosos, elementales por su virtud y profundos por las ideas matemáticas que contengan. Este enfoque permite una lectura más natural de temas que tradicionalmente usan un lenguaje especializado que en general es de fifícil alcance para nuestros alumnos.

TRES EJEMPLOS INTERESANTES

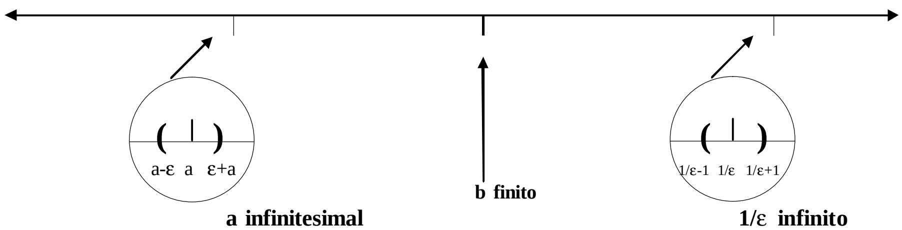
I.- Cálculo No Standard

Números Hiper-reales: IR* (Extensión de IR)

Axioma A: IR es un Cuerpo Ordenado Completo
Axioma B: IR* es un Cuerpo Ordenado Completo que es Extensión de IR

Definición:
- Un elemento $x \in$ IR* es infinitesimal, si $|x| < r$, " $r > o$, $r \in$ IR
- Un elemento $x \in$ IR* es finito, si existe $r \in$ IR tal que $|x| < r$
- Un elemento $x \in$ IR* es infinito, si $|x| > r$, $r \in$ IR

Recta Hiper-real:



II. Maximo Común Divisor (m.c.d.)

$\frac{45}{36}$ es una fracción irreductible sii (c,d)=1;

Ejemplo: (17,15)=1;

¿Cómo reducir $\frac{45}{36}$?

Se determina el m.c.d., el cual es 9 y en seguida se simplifica la fracción por 9.

Resulta $\frac{5}{\mathbf{4}}$, donde (5,4)=1

III.- Conjunto de Relaciones Finitas e Infinitas:

A = {1,2}
B = {1,2,3}

Card(A) = 2 y Card(B) = 3
Entonces: Card(*P*(AXB)) = 6
IR $\subseteq$ AXB es una relación

Hay $2^6 = 64$ relaciones de A a B (R $\in$ *P*(AxB))

A = B = IR
IR $\subseteq$ IRxIR

Card (IR xIR) = **c**
Card (*P*(IRxIR)) > Card IR (Cantor)
Número de relaciones en IR es mayor que el número de elementos de IR
R $\subseteq$ IRxIR $\Leftrightarrow$ R $\in$ *P*(IR)

Referencias.

[1] Bourbaki, N., Elementos de la historia de las matemáticas, Alianza Editorial S.A. Madrid, 1972.

[2] Bolzano, B., Paradoxien des Unendlichen, Leipzig, 1851(trad.anglaise New Haven, Yale Univ.Press., 1950)

[3] Dieudonné, J., Fundamento de Análisis Moderno. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1996

[4] Halmos, P., Teoria Intuitiva de los Conjuntos, Comp. Ed. Continental, S.A., 1971.

[5] Fuchs, W., El Libro de la matemática Moderna, Ediciones Omega, S.A. Barcelona, 1968.

[6] Oubiña L., Introducción a la teoría de conjuntos, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1965.

[7] Stahl, G., Al Explorar lo Infinito, Editorial Universitaria, S.A., 1970

AUTORES CITADOS
(Por Cronología)

GALILEO GALILEI (1564-1642)
Astrónomo, Físico y Matemático italiano
Creó la Ciencia Físico-Matemática de la Naturaleza

BERNHARD BOLZANO (1781-1848)
Teólogo, filósofo y matemático austríaco
Peano influyó en él
Obra póstuma: Paradojas del Infinito (1850)

RICHARD DEDEKIND (1831-1916)
Matemático alemán
Fundador del Algebra Moderna
Se preocupó de los numeros irracionales
Discípulo de Gauss; conoció y admiró a Cantor

GEORGE CANTOR (1845-1918)
Físico, filósofo y matemático ruso, radicado en Alemania
Se preocupó por los conjuntos infinitos
Amigo de Dedekind y atacado con virulencia por Kröenecker

GOTTLOB FREGE (1848-1925)
Matemático alemán
Se dedicó a la Lógica y a los Fundamentos de la Matemática
Es considerado como uno de los grandes Lógicos Modernos

BERTRAND RUSSELL (1872-1970)
Matemático y filósofo inglés
Según sus propias palabras, Peano influyó en él
Premio Nóbel de Literatura 1952

*Universidad Austral de Chile
Fcultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas
Casilla 567 Valdivia-Chile

FINITO E INFINITO

(Un poco de historia)

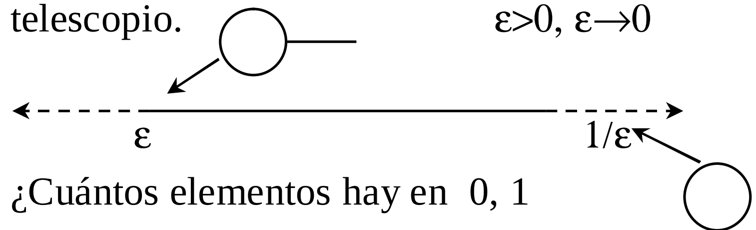
- Bolzano (1781-1848) : Dos conjuntos son equipotentes si existe una correspondencia 1-1 *entre* ellos.
- Cantor (1845-1918):En 1874 enuncia el **Teorema**: ***"El conjunto de los números reales no es enumerable"***, es decir, no puede haber una biyección entre los números naturales y los números reales.
- " En 1878 introdujo la noción fundamental de que dos conjuntos son equipotentes o de la misma potencia si cada uno puede ponerse en correspondencia biunívoca con el otro.
  Llamó numerable a todo conjunto equipotente con IN y lo denominó ℵ (que se lee álef cero).
  Dio el nombre de ***continuun al cardinal de R***, y lo indicó por ***c***.
- Dedekind (1831-1916):En 1888 comunica" Un conjunto finito se caracteriza por no ser equipotente con ninguno de sus subconjuntos propios". Afirma que existe un sistema infinito (sus sistemas corresponden a nuestros conjuntos).
- Frege (1848-1925)- Russell(1872-1970): El número cardinal de un conjunto A es la clase de todos los conjuntos equipotentes con A

- Dedekind* demuestra bellamente en una combinación de razonamiento matemático y de epistemología incierta, que existe un sistema infinito:
  "Mi mundo de ideas , esto es, la totalidad S de todas las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento es infinito. Porque, si s es un elemento de S, entonces la idea s', de que s puede ser un objeto de mi pensamiento, es ella misma un elemento de S. Si se considera como última la imagen F (s) del elemento s, entonces la aplicación F de S, definida por este medio, tiene la propiedad de que la imagen S' es una parte de S y dese luego S'es una parte propia de S, porque existen en S elementos (por ejm., mi ego individual) que son diferentes de cualquier idea tal como s' y por consiguiente no están contenidas en S'. Finalmente es evidente que si a y b son elementos diferentes de S, entonces sus imágenes a' y b' son también diferentes; en consecuencia, la aplicación F es 1-1. Por consiguiente S es infinito".
- (*) Un argumento similar se encuentra en Bolzano: 1851.

ACERCA DEL INFINITO

- INDEFINIDO: carece de fin, límite o término
- NO DEFINIDO, NI INDEFINIDO: Carece de sentido un fin, un límiteo un término
- NEGATIVO E INCOMPLETO
- POSITIVO Y COMPLETO
- ES MERAMENTE **POTENCIA: está siendo pero no es.**
- El **infinito potencial** : Aristóteles lo admite tanto en la serie numérica, como en la serie de puntos de una linea (**Infinito potencial por adición** e **infinito potencial por división; como ejemplo del primero:** Para todo número natural**,** existe uno mayor).
- Las matemáticas se desarrollaron hasta la mitad del sigloXIX, considerando el **infinito potencial** como dogma.

- Usamos del Calculo No Standard: La idea de ubicar los infinitesimales y los infinitamente grandes a través de un microscopio y un telescopio. $\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0$



- ¿Cuántos elementos hay en 0, 1

$$x \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} x \in IZ \Rightarrow \text{Nº de elementos es n} \\ x \in Q \Rightarrow \text{Nº de elem. es infinito} \\ x \in IR=QUQ' \Rightarrow \text{Nº elem.es infinito} \end{cases}$$

- Q=IR y tanto Q y IR tienen infitos elementos
- ¿El todo no es mayor que una de sus partes? X es equipotente con Y : X ~Y sii existe una biyección de x sobre y

EL INFINITO EN LA MATEMATICA

INFINITO
(Numerable, No Numerable)
Desde el Dogma hasta la Definición
Búsqueda de funciones clarificadoras

GALILEO (1564-1918)
$f : n \longrightarrow n$; (f biyectiva)
El Axioma "el todo es mayor que una de las partes no puede aplicarse a conjuntos infinitos

BOLZANO (-)
Definición de equipotencia, Cardinalidad
Dos Intervalos Compactos son equipotentes
Casrd(IN - {n}) = Card(IN); $n \in$ IN

CANTOR(1845-1918)
$A \sim B$ Card(A)= Card(B)
Card(números pares) = Card(IN)
$f : n \longrightarrow 2n$; (f biyectiva)

CANTOR

- Consideró que dos conjuntos equipotentes X e Y tienen la misma cardinalidad, i.e. si existe una función biyectiva entre los conjuntos X e Y
- Llamó numerable a todo conjunto equipotente con IN y a su cardinalidad la llamó $\aleph_o$
- Demostró que existen infinitos conjuntos infinitos y distintos
- En 1874 comunica que no existe biyección de IN a IR
- Simbolizó por ”c” la cardinalidad de IR y la llamó “continuum

- Con sus resultados se puede demostrar que IN y Q tienen la misma cardinalidad
- también se puede demostrar que (0,1) y IR tienen igual cardinalidad
- Para lo anterior hay que encontrar las funciones adecuadas

NUMERABILIDAD DE IN YQ

NO NUMERABILIDAD DE (0,1) y IR

- **Existe una función biyectiva de IN a Q que permite contar los elementos en Q: Se consideran las fracciones irreducibles de Q, ordenándolas de modo que la suma del numerador y denominador sea creciente y cuando tengan la misma suma se ordena por el denominador. Se consideran cada uno de los opuestos de las fracciones obtenidas. El recorrido de la función se forma con las funciones positivas, negativas y el cero, en la siguiente manera:**

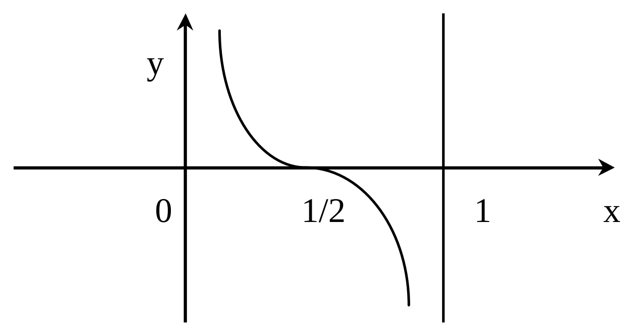
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
0	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Al determinar esta función, se está reforzando el concepto de m.c.d y su algoritmo

- Existe una función biyectiva de (0,1) a IR:

$$f:\ (0,1) \longrightarrow \mathrm{IR}$$

$$\text{tal que } f(x) = \cot g\, \pi x$$



- Usando la definición de equipotencia (que puede demostrase fácilmente que es una relación de equivalencia), se demuestra que el número de fracciones en (0,1) es aleph cero.